第 40 卷　第 6 期
2023 年 12 月
应　用　力　学　学　报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 40 No. 6
Dec. 2023

文章编号:1000-4939(2023)06-1437-08

有限深度土体运动对 Winkler 地基上梁 1/3 次亚谐共振影响分析

马建军,王满,韩书娟,李达

(河南科技大学土木工程学院,471023 洛阳)

摘　要: 有限深度土体运动对弹性地基上梁的动力学特性和非线性响应均有显著影响。为丰富和深化相关研究内容,本研究基于引入土体运动影响的 Winkler 地基梁的非线性动力学模型,关注了有限深度土体运动如何影响弹性地基上梁在 1/3 次亚谐共振条件下的行为。通过应用 Galerkin 方法和多尺度法推导出了梁在 1/3 次亚谐共振情况下的频率响应方程以及位移的二阶近似解。进而根据响应方程进行数值计算,得到了 Winkler 地基上梁的 1/3 次亚谐共振的幅频响应曲线,分析了与土体运动密切相关的参数(地基深度、质量、弹性模量、地基刚度和阻尼等)和激励幅值等对梁亚谐共振的影响。结果表明:考虑有限深度土体运动的影响后,梁的 1/3 次亚谐共振响应的区域和幅值均减小;随弹性地基深度、质量、弹性模量和刚度变化,幅频响应曲线的偏转程度、共振区域和响应幅值均发生定量改变;外激励幅值对梁 1/3 次亚谐共振响应的特性无影响,而对响应幅值和共振区域则有显著影响;地基阻尼对梁的 1/3 次亚谐共振有明显的抑制作用。

关键词: Winkler 地基梁;土体运动;1/3 次亚谐共振;多尺度法;幅频响应曲线

中图分类号: TU348;O322　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.11776/j.issn.1000-4939.2023.06.025

Effect of soil mass motion on 1/3 sub-harmonic resonance of beams on Winkler foundation

MA Jianjun, WANG Man, HAN Shujuan, LI Da

(School of Civil Engineering, Henan University of Science and Technology, 471023 Luoyang, China)

Abstract: The effect of the finite-depth soil mass motion on the dynamic characteristics and nonlinear response of the beam on an elastic foundation is significant. To enhance and deepen the scope of related research, based on the nonlinear equation of motion of the finite-length beam on Winkler foundation with the consideration of soil mass motion, the study focuses on examining how finite-depth soil motion impacts the behavior of an elastic foundation beam under 1/3 order subharmonic resonance conditions. Then, the frequency-response equation and the second-order approximation solution of the 1/3 order sub-harmonic resonance of the beam are derived through the application of the Galerkin method and the multiple scales method. The effects of parameters closely related to soil mass motion (foundation depth, soil mass, elastic

收稿日期: 2021-04-11　　**修回日期:** 2022-08-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 11502072);河南省高等学校青年骨干教师培养计划资助项目(No. 2019GGJS076)
通信作者: 马建军,教授。E-mail:majianjun@haust.edu.cn
引用格式: 马建军,王满,韩书娟,等. 有限深度土体运动对 Winkler 地基上梁 1/3 次亚谐共振影响分析[J]. 应用力学学报,2023,40(6):1437-1444.
MA Jianjun, WANG Man, HAN Shujuan, et al. Effect of soil mass motion on 1/3 sub-harmonic resonance of beams on Winkler foundation[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(6):1437-1444.

modulus, stiffness, and damping, etc.) and excitation amplitude on the sub-harmonic resonance of the beam are investigated by the response equation. The numerical results show that when the effect of soil mass motion is introduced into the equation of motion of the beam, the range and amplitude of the 1/3 order sub-harmonic resonance of the beam decrease. With the change of the depth, mass, and elastic modulus of foundation, some quantitative differences are observed in the frequency-response curves, such as the degree of deflection, resonance range, and amplitude. Excitation's amplitude does not affect the characteristics of the 1/3 order sub-harmonic resonance of the beam. Still, it has a significant effect on the response amplitude and resonance region. On the other hand, the damping of the foundation has apparent inhibition on the 1/3 order sub-harmonic resonance of the beam.

Key words: Winkler foundation beam; soil mass motion; 1/3 order sub-harmonic resonance; method of multiple scales; frequency-response curves

随着工程实践需要和相关理论研究深入，作为模拟土-结构相互作用的基本力学模型之一，Winkler 地基上梁模型有广泛应用[1-3]。相应的研究内容已很丰富，Winkler 地基上梁在静/动力荷载下的响应特征也日益清晰[4-5]。

基于 Winkler 地基梁理论，国内外学者已在土-结构相互作用领域的线性和非线性动力学研究中积累了丰富的研究成果[6-8]。然而，观察常见的土-结构相互作用系统的理论模型，作者注意到以往的研究通常将弹性地基的作用简化为地基反力，而未充分考虑土体惯性运动对支承梁动力学特性的影响。随着研究的深入，一些学者已开始关注土体和其支承结构在有限深度范围内的共同运动，以及这种共同运动可能导致的能量传递和转换现象[9-11]。这些研究均表明，将土体运动引入到弹性地基梁的动力学方程后，系统的动力响应发生了显著改变。考虑土体运动对 Winkler 地基上梁的动力学响应的作用后，系统非线性动力学方程中的非线性项包含与土体运动密切相关的地基参数[11]。此时，在简谐激励的作用下，当外激励频率接近系统固有频率的整数倍时，可能发生亚谐和超谐共振响应，出现复杂的系统非线性动力响应现象[12-13]。因此，为更深入地研究 Winkler 地基上梁的非线性动力学特性，有必要探究有限深度土体运动对梁在 1/3 次亚谐波共振情况下的响应所产生的影响。

本研究旨在探究土体运动对 Winkler 地基上梁的 1/3 次亚谐共振响应的影响。基于考虑有限深度土体运动的非线性梁运动方程，应用 Galerkin 方法和多尺度法，推导梁的 1/3 次亚谐共振的幅频响应方程以及位移的近似解。通过数值计算，分析运动方程中与有限深度地基运动直接或间接相关的各项参数对梁的 1/3 次亚谐共振响应的影响，以揭示有限深度土体运动对土-结构相互作用系统非线性共振响应的潜在影响。

1 非线性动力学模型

如图 1 所示，研究对象为受简谐横向激励的弹性地基上有限长梁，其中 L、b、h 分别为梁的长、宽、高，H 为地基深度。以梁端为原点 O，中轴线为 x 轴建立平面直角坐标系 O-xy；$p(x,t) = P\cos(\Omega t)$ 为简谐横向激励，其中 P 和 Ω 分别为激励幅值和频率；$v(x,t)$ 为梁沿 y 方向的位移；$u(x,t)$ 为梁沿 x 方向的位移，考虑工程实际，在建模分析时可忽略。同时，为揭示土体运动对其支承梁动力响应的影响，引入 $v_w(x,y,t)$ 表示梁下土体位移随埋深变化的情况。

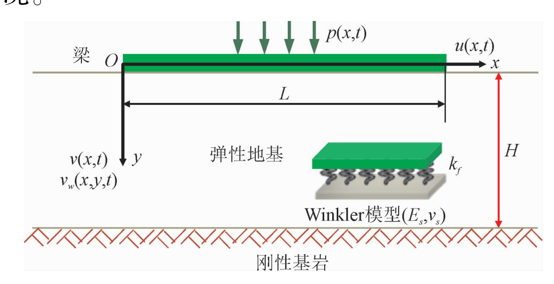


图 1 弹性地基上有限长梁模型

Fig. 1 The finite-length beam on elastic foundation

基于 Winkler 地基模型和 Euler-Bernoulli 梁理论，将有限深度地基运动的影响引入到土-结构相互作用系统的动力学模型，并引入如下无量纲参数。

$$x^* = \frac{x}{L},\ y^* = \frac{y}{L},\ v^* = \frac{v}{L},\ h^* = \frac{h}{L},$$

$$t^* = t\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, k_f^* = \frac{k_f L^4}{EI}, P^* = \frac{PL^4}{EI},$$

$$\Omega^* = \Omega\sqrt{\frac{mL^4}{EI}},\ c^* = \frac{cL^2}{\sqrt{mEI}},\ c_s^* = \frac{c_sL^2H}{\sqrt{mEI}} \tag{1}$$

可得弹性地基上梁的无量纲运动方程[11]为

$$v^{*''''} + \ddot{v}^*\left(1 + \frac{\rho_s H}{m}\int_0^1\varphi \mathrm{d}y\right) + \dot{v}^*\left[c^* + c_s^*\int_0^1(1-\varphi)\mathrm{d}y\right] + k_f^* v^* = P^*\cos(\Omega^* t^*) - \frac{h^*}{2}\frac{\rho_s H}{m}(v^{*\prime}\ddot{v}^*)'\int_0^1\varphi\mathrm{d}y - \frac{h^*}{2}k_f^*(v^*v^{*\prime})' - \frac{h^*}{2}c_s^*(v^{*\prime}\dot{v}^*)'\int_0^1(1-\varphi)\mathrm{d}y - [v^{*\prime}(v^{*\prime}v^{*\prime\prime})']' - \frac{h^*}{2}\left(P^*v^{*\prime} + \frac{P^*v^{*\prime 3}}{2}\right)'\cos(\Omega^* t^*) \tag{2}$$

其中,各符号意义如表 1 所示。

表 1　弹性地基上梁的运动方程中各符号定义

Tab. 1　The significance of symbols in the motion equation of beam on elastic foundation

符号	定义
ρ	梁的体密度
A	bh ,梁的横截面积
m	ρ_A ,单位长度梁的质量
ρ_s	单位长度梁下单位深度地基质量
c	单位长度梁的黏滞阻尼系数
c_s	单位长度梁下单位深度地基的黏滞阻尼系数
E	梁的弹性模量
I	梁的弹性模量和惯性矩
k_f	Winkler 地基刚度系数
φ	地基位移沿 y 方向衰减函数
$(\ )^{\cdot}$	对变量 t 求偏导。
$(\ )'$	对变量 x 求偏导。

为便于推导分析,省略各无量纲参数的上标星号并引入线性和非线性算子,式(2)可简化为

$$\ddot{v} + \mu\dot{v} + Lv = \frac{P}{\alpha}\cos(\Omega t) - \frac{h}{2\alpha}\left(v' + \frac{v'^3}{2}\right)'P\cos(\Omega t) + G_{21}(v,v) + G_{22}(v,v) + G_{23}(v,v) + G_3(v,v,v) \tag{3}$$

其中:$\alpha = 1 + \beta\int_0^1\varphi\mathrm{d}y$;$\beta = \frac{\rho_s H}{m}$;$\mu = \frac{c + c_s\int_0^1(1-\varphi)\mathrm{d}y}{\alpha}$;线性算子 $Lv = \frac{1}{\alpha}v'''' + \frac{k_f}{\alpha}v$;平方非线性算子 $G_{21} = -\frac{h(1-\alpha)}{2\alpha}(v'\ddot{v})'$,$G_{22} = -\frac{hk_f}{2\alpha}\cdot(vv')'$,$G_{23} = -\frac{hc_s\int_0^1(1-\varphi)\mathrm{d}y}{2\alpha}(v'\dot{v})'$;立方非线性算子 $G_3 = -\frac{1}{\alpha}[v'(v'v'')']'$。

显然,参数 α、β 和 μ 均与有限深度地基的物理特性直接相关。因此系统运动方程中非线性项均与土体运动相关,可以预期有限深度土体运动对梁的 1/3 次亚谐共振响应存在显著影响。

2　1/3 次亚谐波共振($\Omega \approx 3\omega_n$)

利用 Galerkin 方法和多尺度法[14],T_1 尺度的存在将导致 ε^2 阶和 ε^3 阶系数调整后求解得任一特解中均包含因子为 $T_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n T_0}$ 的长期项,除非 $D_1A_n = 0$,所以 A_n 必与 T_1 无关。故略去 T_1 尺度。

可得弹性地基梁的位移 $v(x,t;\varepsilon)$ 展开为

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i v_i(x,T_0,T_2) \tag{4}$$

其中:ε 是小参数;$T_i = \varepsilon^i t\ (i = 0,2)$,$\partial/\partial t = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots$,$D_i \equiv \partial/\partial T_i$。

引入调谐参数 σ 研究 1/3 次亚谐波共振响应,外激励频率与弹性地基梁的固有频率之间的关系有:$\Omega = 3\omega_n + \varepsilon^2\sigma$,其中:$\omega_n$ 为弹性地基梁的第 n 阶频率。为平衡非线性效应,将梁的黏滞阻尼系数 c,弹性地基的黏滞阻尼系数 c_s 和外激励幅值 P 分别调整为 $\varepsilon^2 c$、$\varepsilon^2 c_s$ 和 εP。将式(4)代入式(3),并按小参数 ε 的各阶系数调整,可得

ε 阶:

$$D_0^2 v_1 + Lv_1 = \frac{P}{\alpha}\cos(\Omega T_0) \tag{5}$$

ε^2 阶:

$$D_0^2 v_2 + Lv_2 = -\frac{h}{2\alpha}v_1''P\cos(\Omega T_0) + G_{21}(v_1,v_1) + G_{22}(v_1,v_1) \tag{6}$$

ε^3 阶:

$$D_0^2 v_3 + Lv_3 = -\mu D_0 v_1 - 2D_0D_2v_1 - \frac{hP}{2\alpha}v_2''\cos(\Omega T_0) + G_{21}(v_1,v_2) + G_{21}(v_2,v_1) + G_{22}(v_1,v_2) + G_{22}(v_2,v_1) + G_3(v_1,v_1,v_1) \tag{7}$$

以端部约束为固支-自由的梁为例,边界条件为

$$v_i(0,\ T_0,\ T_2) = 0,\ v_i'(0,\ T_0,\ T_2) = 0,\ v_i''(1,T_0,T_2) = 0,\ v_i'''(1,\ T_0,\ T_2) = 0\ (i = 1,2,3) \tag{8}$$

式(5)~(6)的解分别为

$$v_1(x,T_0,T_2) = A_n(T_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n T_0}\phi_n(x) + \varphi_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega T_0} + \mathrm{cc} \tag{9}$$

$$v_2(x,T_0,T_2)=\Lambda_1A_n^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_nT_0}\Psi_{1n}(x)+\Lambda_1A_n\bar{A}_n\Psi_{2n}(x)+\{\Lambda_1\Psi_{3n}(x)+\Lambda_2\Psi_{4n}(x)\}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_n+\Omega)T_0}+\{\Lambda_1\Psi_{5n}(x)+\Lambda_2\Psi_{6n}(x)\}\bar{A}_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega-\omega_n)T_0}+\Lambda_2\Psi_{7n}(x)A_n\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Omega T_0}+\Lambda_2\Psi_{8n}(x)-\frac{hP}{4\alpha}[\Psi_{9n}(x)+\Psi_{10n}(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Omega T_0}+\Psi_{11n}(x)\bar{A}_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega-\omega_n)T_0}+\Psi_{12n}(x)A_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega+\omega_n)T_0}]+\mathrm{cc} \tag{10}$$

其中：A_n 为幅值；$\bar{A}_n$ 为 A_n 的共轭；$\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}$；cc 表示复共轭项；$\Lambda_1=\left[1-\frac{\omega_n^2(\alpha-1)}{k_f}\right]$；$\Lambda_2=\left[1-\frac{\Omega^2(\alpha-1)}{k_f}\right]$；$\varphi_n(x)$ 和 $\Psi_{jn}(x)(j=1,2,3,\cdots,12)$ 应满足如下公式。

$$L\varphi_n-\Omega^2\varphi_n=\frac{P}{2\alpha},L\Psi_{1n}-4\omega_n^2\Psi_{1n}=G_{22}(\phi_n,\phi_n),L\Psi_{2n}=G_{22}(\phi_n,\phi_n),L\Psi_{3n}-(\omega_n+\Omega)^2\Psi_{3n}=G_{22}(\varphi_n,\phi_n),L\Psi_{4n}-(\omega_n+\Omega)^2\Psi_{4n}=G_{22}(\phi_n,\varphi_n),L\Psi_{5n}-(\Omega-\omega_n)^2\Psi_{5n}=G_{22}(\varphi_n,\phi_n),L\Psi_{6n}-(\Omega-\omega_n)^2\Psi_{6n}=G_{22}(\phi_n,\varphi_n),L\Psi_{7n}-4\Omega^2\Psi_{7n}=G_{22}(\varphi_n,\varphi_n),L\Psi_{8n}=G_{22}(\varphi_n,\varphi_n),L\Psi_{9n}=\varphi_n'',L\Psi_{10n}-4\Omega^2\Psi_{10n}=\varphi_n'',L\Psi_{11n}-(\Omega-\omega_n)^2\Psi_{11n}=\phi_n'',L\Psi_{12n}-(\Omega-\omega_n)^2\Psi_{12n}=\phi_n'' \tag{11}$$

$\phi_n(x)$ 为梁的第 n 阶模态；运用特征值方程[11]，可得模态函数解为

$$\phi_n(x)=C(\cos\xi_nx-\chi_n\sin\xi_nx-\cosh\xi_nx+\chi_n\sinh\xi_nx) \tag{12}$$

其中：C 为待定系数；$\xi_n=\sqrt[4]{\alpha\omega_n^2-k_f}$；$\chi_n=\frac{\cosh\xi_n+\cos\xi_n}{\sinh\xi_n+\sin\xi_n}$。

将式(9)～(10)代入式(7)，得可解性条件为

$$2\omega_n\mathrm{i}(\dot{A}_n+\mu_nA_n)-\Gamma_n^{\mathrm{e}}\bar{A}_n-\Gamma_n^{p}A_n-\Gamma_{n/3}^{f}\bar{A}_n^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_2}=0 \tag{13}$$

其中，各系数的表达式见附录 A。

令响应幅值 A_n 为

$$A_n=\frac{1}{2}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_n} \tag{14}$$

其中，a_n 和 β_n 均为 T_2 的实函数。将式(14)代入式(13)，分离实部与虚部可得

$$\dot{a}_n=-\mu_na_n+\frac{\Gamma_{n/3}^f}{4\omega_n}\sin\gamma_{n/3} \tag{15a}$$

$$a_n\dot{\beta}_n=-\frac{-\Gamma_n^ea_n^3}{8\omega_n}-\frac{\Gamma_n^pa_n}{2\omega_n}-\frac{\Gamma_{n/3}^f}{4\omega_n}a_n^2\cos\gamma_{n/3} \tag{15b}$$

其中，$\gamma_{n/3}=\sigma T_2-3\beta_n$。令式(15)中 $\dot{a}_n=0$ 和 $\dot{\gamma}_{n/3}=0$，可得梁 1/3 次亚谐共振的幅频响应方程为

$$\sigma=\frac{-3\Gamma_n^e}{8\omega_n}a_n^2-\frac{3\Gamma_n^p}{2\omega_n}\pm3\left(\frac{a_n^2{\Gamma_{n/3}^f}^2}{16\omega_n^2}-\mu_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

或者 $a_n=0$（为便于分析，后续计算和参数分析中均忽略梁 1/3 次亚谐共振响应的平凡解）。

进而，可得梁位移 $v(x,t)$ 的二次近似表达式（取小参数 $\varepsilon=1$）为

$$v(x,t)=a_n\phi_n(x)\cos\left(\frac{\Omega t-\gamma_{n/3}}{3}\right)+2\varphi_n(x)\cos(\Omega t)+\frac{a_n^2}{2}\Lambda_1\Psi_{1n}(x)\cos\left(\frac{2\Omega t-2\gamma_{n/3}}{3}\right)+\frac{a_n^2}{2}\Lambda_1\Psi_{2n}(x)+2\Psi_{7n}\Lambda_2\cos(2\Omega t)+a_n[\Lambda_1\Psi_{3n}(x)+\Lambda_2\Psi_{4n}(x)]\cos\left(\frac{4\Omega t-\gamma_{n/3}}{3}\right)+a_n[\Lambda_1\Psi_{5n}(x)+\Lambda_2\Psi_{6n}(x)]\cos\left(\frac{2\Omega t+\gamma_{n/3}}{3}\right)+2\Lambda_2\Psi_{8n}(x)-\frac{hp}{4}\left[2\Psi_{9n}(x)+2\Psi_{10n}(x)\cos(2\Omega t)+a_n\Psi_{11n}(x)\cos\left(\frac{2\Omega t+\gamma_{n/3}}{3}\right)+a_n\Psi_{12n}(x)\cos\left(\frac{4\Omega t-\gamma_{n/3}}{3}\right)\right]+\cdots \tag{17}$$

3 数值分析

相比于未考虑有限深度弹性地基运动影响的模型[15]，本研究的 1/3 次亚谐共振幅频响应方程中包含了 H、ρ_s 和 E_s 等与弹性地基物理力学特性密切相关的参数。通过分析这些参数的影响，可揭示有限深度弹性地基运动对其支承梁 1/3 次亚谐共振的影响。

取表 2 所示[11]地基和梁的物理参数进行数值分析。

根据文献[16]计算方法，可得 k_f 有量纲参数值为 6.235×10^6 N/m^2。且数值分析中，外激励幅值取 $P=3.8$。

表 2　弹性地基和梁的物理参数值

Tab. 2　Dimensional parameters and material properties of the elastic foundation and beam

符号	物理意义	数值	单位
L	梁的长度	6.096	m
b	梁的宽度	0.610	m
h	梁的高度	0.305	m
r	梁的体密度	2.403×10^3	kg/m^3
E	梁的弹性模量	2.482×10^4	MPa
n	梁的泊松比	0.25	–
c	单位长度梁的黏滞阻尼系数	180	N · s/m^2
H	弹性地基深度	10.00	m
r_s	单位长度梁下单位深度地基质量	1.037×10^2	kg/m^2
E_s	弹性地基的弹性模量	23.94	MPa
n_s	弹性地基的泊松比	0.20	–
c_s	单位长度梁下单位深度地基的黏滞阻尼系数	18	N · s/m^3

3.1　H 的影响

Winkler 地基梁 1/3 次亚谐共振在不同有限地基深度时的幅频响应曲线如图 2 所示。

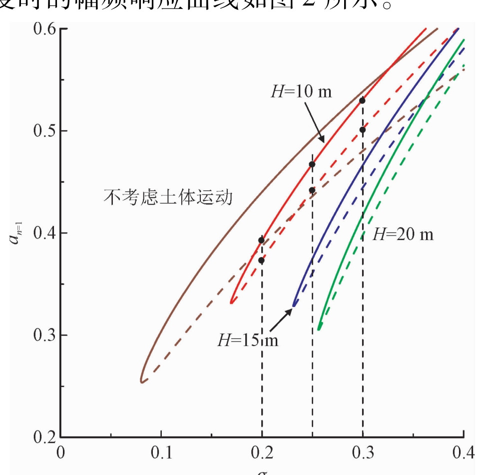


图 2　参数 H 对梁 1/3 次亚谐共振幅频响应的影响

Fig. 2　Effect of parameter H on 1/3 sub-harmonic response of the beam

其中,纵坐标 $a_{n=1}$为式(16)中 a_n取第一阶模态时的响应幅值,实线和虚线分别表示稳定解和不稳定解。对比图 2 中考虑有限深度土体运动与不考虑土体运动的幅频响应曲线,可直观地看出土体运动对梁 1/3 次亚谐共振响应的影响显著。如图 2 所示,考虑土体运动影响后,土-结构相互作用系统的刚度显著增大,梁 1/3 次亚谐共振区域显著减小。表明将土体运动引入土-结构相互作用系统的动力学模型后,系统的动力学特性发生显著改变。随着深度 H 增大,系统刚度增大,共振区域减小。

3.2　ρ_s 的影响

图 3 给出了参数 ρ_s 对 Winkler 地基梁 1/3 次亚谐共振幅频响应的影响。在同等条件下,随参与运动的地基质量增大,梁 1/3 次亚谐共振响应的幅值减小,硬弹簧特性则稍有增强。结合图 2 可知,有限深度土体运动对梁 1/3 次亚谐共振响应的非线性特征有一定抑制作用。

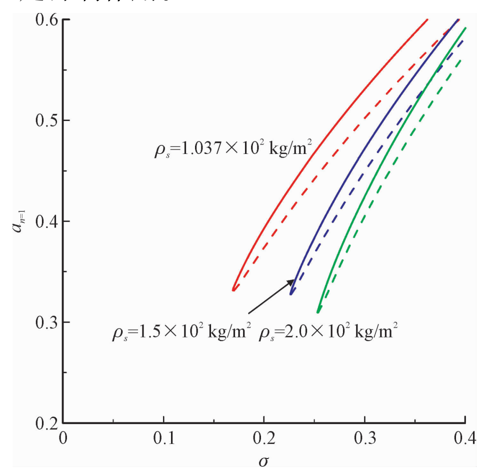


图 3　参数 ρ_s 对梁 1/3 次亚谐共振幅频响应的影响

Fig. 3　Effect of parameter ρ_s on 1/3 sub-harmonic response of the beam

3.3　E_s 的影响

图 4 给出了地基弹性模量 E_s 对 Winkler 地基梁 1/3 次亚谐共振幅频响应的影响。

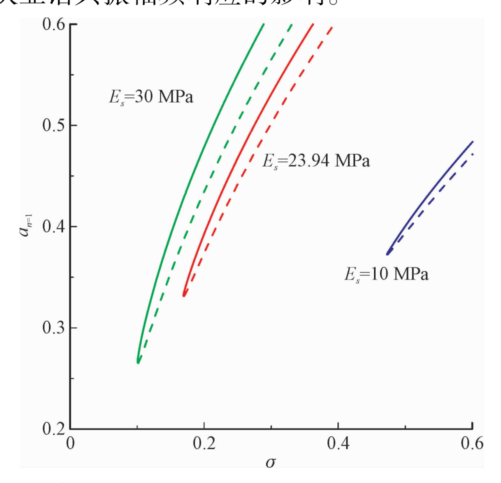


图 4　参数 E_s 对梁 1/3 次亚谐共振幅频响应的影响

Fig. 4　Effect of parameter E_s on 1/3 sub-harmonic response of the beam

随地基弹性模量 E_s 增大,梁 1/3 次亚谐共振响应幅值的非平凡解增大,同时响应的硬弹簧特性减弱。且 E_s 对弹性地基梁 1/3 次亚谐共振响应幅值的影响随其增大到一定程度而迅速减弱。因此,若

有限深度内土体为刚性地基时,梁的1/3次谐波共振区域较宽。

3.4 k_f 的影响

为更直观地展现土体运动对弹性地基梁1/3次亚谐共振响应的影响,图5给出了Winkler地基参数 k_f 对梁1/3次亚谐共振幅频响应的影响。由图5可知,随地基刚度系数 k_f 增大,梁1/3次亚谐共振响应幅值的非平凡解变化较复杂,而且响应的共振区域显著增大。总体而言,地基刚度系数 k_f 对梁1/3次亚谐共振响应起到动力软化作用。

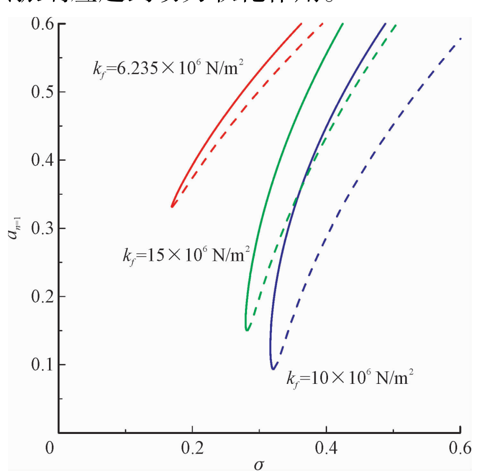


图5 参数 k_f 对梁1/3次亚谐共振幅频响应的影响

Fig. 5 Effect of parameter k_f on 1/3 sub-harmonic response of the beam

3.5 P 的影响

图6给出了不同外激励幅值时Winkler地基梁1/3次亚谐共振响应的变化情况,其中 $P=1.8, 3.8, 5.0$。

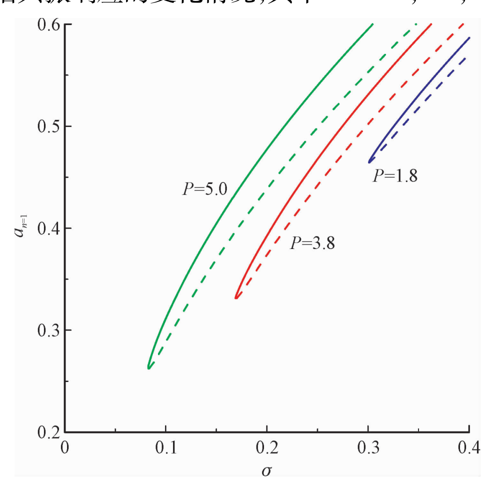


图6 参数 P 对梁1/3次亚谐共振幅频响应的影响

Fig. 6 Effect of parameter P on 1/3 sub-harmonic response of the beam

随外激励幅值增大,梁1/3次亚谐共振幅频响应曲线向左下方移动,响应幅值和共振区域均显著增大。结果表明,外激励幅值越大,梁的1/3次亚谐共振越容易被激发。各条幅频响应曲线的偏转程度基本不变,表明外激励幅值对梁1/3次亚谐共振的基本特征基本无影响。

3.6 η 的影响

引入参数 $\eta = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\zeta}{\alpha}\int_0^1 (1-\varphi)\mathrm{d}y$ 以探究土体黏滞阻尼对弹性地基梁系统1/3次亚谐共振响应的影响。其中,$\zeta = \dfrac{c_s}{c}$ 为有限深度土体和梁的黏滞阻尼比。则由表2参数计算可得 $\eta = 0.131$ 。图7给出了不同调谐参数 σ 时梁1/3次亚谐共振响应幅值随参数 η 的变化情况。当 $\eta = 0.131$ 时,在固定调谐参数 σ 时所得响应幅值与图2中 $H=10$ m时的数值相一致。且随 η 增大,梁1/3次亚谐共振的响应幅值减小。如图7所示,在3组固定参数下均存在一个最大 η 值。若超过最大 η 值,梁的1/3次亚谐共振响应将被完全抑制。

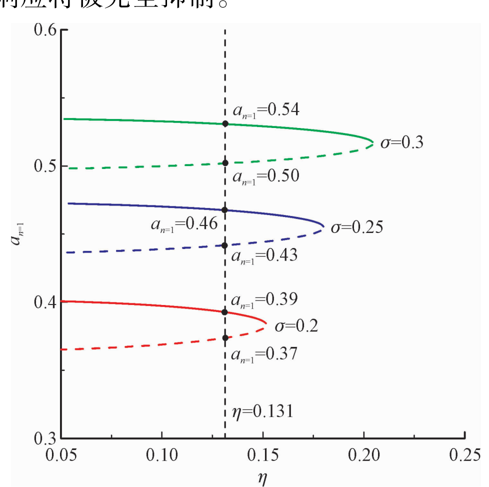


图7 参数 η 对梁1/3次亚谐共振响应幅值的影响

Fig. 7 Effect of parameter η on 1/3 sub-harmonic response of the beam

4 结论

本研究基于考虑有限深度土体运动影响的Winkler地基梁的非线性动力学模型,专注于分析有限深度土体运动对弹性地基梁系统1/3次亚谐共振响应的影响。利用Galerkin方法和多尺度法,得到了梁的1/3次亚谐共振幅频响应方程以及位移的近

似解。进而通过对幅频响应曲线的分析，探讨了有限深度土体运动对梁的 1/3 次亚谐共振响应的影响。研究结果揭示了以下关键点。

1）Winkler 地基上梁的 1/3 次亚谐共振响应影响受有限深度土体运动影响显著，且其对梁 1/3 次亚谐共振响应起动力软化作用。

2）弹性地基模量 E_s 和地基刚度系数 k_f 均对梁的 1/3 次亚谐共振响应的激发有抑制作用。

3）在特定参数范围内，弹性地基的物理参数中存在最大黏滞阻尼系数。若参数 η 大于限定值，Winkler 地基上梁的 1/3 次亚谐共振响应将不能被激发。

参考文献：

[1] YOUNESIAN D, HOSSEINKHANI A, ASKARI H, et al. Elastic and viscoelastic foundations: A review on linear and nonlinear vibration modeling and applications[J]. Nonlinear dynamics, 2019, 97(1): 853-895.

[2] WANG Y H, THAM L G, CHEUNG Y K. Beams and plates on elastic foundations: A review[J]. Progress in structural engineering and materials, 2005, 7(4): 174-182.

[3] 蒲育，滕兆春. Winkler-Pasternak 弹性地基 FGM 梁自由振动二维弹性解[J]. 振动与冲击，2015，34(20)：74-79.
PU Yu, TENG Zhaochun. Two-dimensional elasticity solutions for free vibration of FGM beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundations[J]. Journal of vibration and shock, 2015, 34(20): 74-79(in Chinese).

[4] 李顺群，郑刚. 复杂条件下 Winkler 地基梁的解析解[J]. 岩土工程学报，2008，30(6)：873-879.
LI Shunqun, ZHENG Gang. Analytic solution of beams on Winkler foundation under complex conditions [J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2008, 30(6): 873-879(in Chinese).

[5] 何威，左树行，白象忠. 弹性地基双层梁理论下的混凝土路面力学分析[J]. 应用力学学报，2020，37(1)：63-69.
HE Wei, ZUO Shuxing, BAI Xiangzhong. Mechanical analysis of concrete pavement via the theory of double layer beams on elastic foundation[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(1): 63-69(in Chinese).

[6] 王家乐，夏桂云. Winkler 地基上修正 Timoshenko 梁振动分析[J]. 振动与冲击，2020，39(3)：30-37.
WANG Jiale, XIA Guiyun. Vibration analysis for a modified Timoshenko beam on Winkler elastic foundation[J]. Journal of vibration and shock, 2020, 39(3): 30-37(in Chinese).

[7] 赵明华，张玲，马缤辉，等. 考虑水平摩阻力的 Winkler 地基有限长梁非线性受力分析[J]. 土木工程学报，2009，42(7)：106-112.
ZHAO Minghua, ZHANG Ling, MA Binhui, et al. Nonlinear analysis of finite-length beams on Winkler foundation with horizontal resistance[J]. China civil engineering journal, 2009, 42(7): 106-112(in Chinese).

[8] BEHNAMFAR F, ALIBABAEI H. Classical and non-classical time history and spectrum analysis of soil-structure interaction systems [J]. Bulletin of earthquake engineering, 2017, 15(3): 931-965.

[9] SAITO H, MURAKAMI T. Vibrations of an infinite beam on an elastic foundation with consideration of mass of a foundation[J]. Bulletin of JSME, 1969, 12(50): 200-205.

[10] 马建军，秦紫果，刘丰军，等. 考虑有限深度土体运动的 Winkler 地基梁自由振动分析[J]. 振动与冲击，2019，38(6)：62-66.
MA Jianjun, QIN Ziguo, LIU Fengjun, et al. Free vibration of beams on Winkler foundation with the consideration of finite-depth soil motion[J]. Journal of vibration and shock, 2019, 38(6): 62-66(in Chinese).

[11] MA J J, LIU F J, NIE M Q, et al. Nonlinear free vibration of a beam on Winkler foundation with consideration of soil mass motion of finite depth[J]. Nonlinear dynamics, 2018, 92(2): 429-441.

[12] 王满，马建军，韩书娟. 考虑有限深度土体运动的 Winkler 地基梁 1/2 次谐波共振响应分析[J]. 振动与冲击，2020，39(11)：165-170.
WANG Man, MA Jianjun, HAN Shujuan. 1/2 sub-harmonic resonance of beams on Winkler foundation with consideration of finite-depth soil motion [J]. Journal of vibration and shock, 2020, 39(11): 165-170(in Chinese).

[13] 马建军，王满，韩书娟. 有限深度土体运动对弹性地基梁超谐共振响应影响分析[J]. 地震工程与工程振动，2020，40(6)：94-102.
MA Jianjun, WANG Man, HAN Shujuan. Effect of motion of soil mass with finite-depth on super-harmonic resonance of beams on elastic foundation[J]. Earthquake engineering and engineering dynamics, 2020, 40(6): 94-102(in Chinese).

[14] NAYFEH A H, MOOK D T. Nonlinear oscillations[M]. New York: Wiley, 1995: 56-59.

[15] 马建军，刘丰军，谢镭，等. 简谐荷载作用下弹性地基上不可伸长梁的 2 次超谐共振响应研究[J]. 应用力学学报，2016，33(1)：80-85.
MA Jianjun, LIU Fengjun, XIE Lei, et al. Study on second super-harmonic resonance of an inextensional beam on elastic foundation under harmonic lateral load[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2016, 33(1): 80-85(in Chinese).

[16] WANG L H, MA J J, ZHAO Y Y, et al. Refined modeling and free vibration of inextensional beams on the elastic foundation[J]. Journal of applied mechanics, 2013, 80(4): 041026.

附录 A

$$\Gamma_n^e = \Lambda_1(\Lambda_1 - 1) \times \left[4\int_0^1 G_{22}(\Psi_{1n},\phi_n)\phi_n \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{2} \mathrm{i}\int_0^1 G_{22}(\phi_n,\Psi_{in})\phi_n \mathrm{d}x\right] + \Lambda_1 \times \sum_{i=1}^{2}\int_0^1 [G_{22}(\phi_n,\Psi_{in}) + G_{22}(\Psi_{in},\phi_n)]\phi_n \mathrm{d}x + 3\int_0^1 G_3(\phi_n,\phi_n,\phi_n)\phi_n \mathrm{d}x$$

$$\Gamma_{n/3}^f = \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &\frac{h(1-\alpha)}{2\alpha}\left\{\begin{aligned}&(\Omega-\omega_n)^2\Lambda_1 G_{22}(\Psi_{5n},\phi_n) + \omega_n^2\Lambda_1 G_{22}(\phi_n,\Psi_{5n}) + (\Omega-\omega_n)^2\Lambda_2 G_{22}(\Psi_{6n},\phi_n) + \omega_n^2\Lambda_2 G_{22}(\phi_n,\Psi_{6n}) + \\ &\omega_n^2\Lambda_1[4G_{22}(\Psi_{1n},\varphi_n) + G_{22}(\varphi_n,\Psi_{1n})] - \frac{(\Omega-\omega_n)^2 hP}{4\alpha}[G_{22}(\Psi_{11n},\phi_n) + G_{22}(\phi_n,\Psi_{11n})]\end{aligned}\right\} - \\ &\frac{hk_f}{2\alpha}\left\{\begin{aligned}&\Lambda_1[G_{22}(\phi_n,\Psi_{5n}) + G_{22}(\Psi_{5n},\phi_n)] + \Lambda_2[G_{22}(\phi_n,\Psi_{6n}) + G_{22}(\Psi_{6n},\phi_n)] - \frac{hP}{4\alpha}[G_{22}(\Psi_{11n},\phi_n) + \\ &G_{22}(\phi_n,\Psi_{11n})] + \Lambda_1[G_{22}(\Psi_{1n},\varphi_n) + G_{22}(\varphi_n,\Psi_{1n})]\end{aligned}\right\} - \\ &\frac{hP}{4\alpha}\Lambda_1\Psi_{1n}'' + G_3(\varphi_n,\varphi_n,\phi_n) + G_3(\varphi_n,\phi_n,\varphi_n) + G_3(\phi_n,\varphi_n,\varphi_n) \end{aligned} \right\}\phi_n \mathrm{d}x$$

$$\Gamma_n^p = \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &\frac{h(1-\alpha)}{2\alpha}\left\{\begin{aligned}&(\omega_n+\Omega)^2\Lambda_1 G_{22}(\Psi_{3n},\varphi_n) + \Omega^2\Lambda_1 G_{22}(\varphi_n,\Psi_{3n}) + (\omega_n+\Omega)^2\Lambda_2 G_{22}(\Psi_{4n},\varphi_n) + \\ &\Omega^2\Lambda_2 G_{22}(\varphi_n,\Psi_{4n}) + (\omega_n-\Omega)^2\Lambda_1 G_{22}(\Psi_{6n},\varphi_n) + \Omega^2\Lambda_1 G_{22}(\varphi_n,\Psi_{6n}) + \\ &\frac{(\omega_n+\Omega)^2 hP}{4\alpha}G_{22}(\Psi_{12n},\varphi_n) + (\omega_n-\Omega)^2\Lambda_2 G_{22}(\Psi_{5n},\varphi_n) + \Omega^2\Lambda_2 G_{22}(\varphi_n,\Psi_{5n}) + \\ &2\omega_n^2\Lambda_2 G_{22}(\varphi_n,\Psi_{8n}) + \frac{\Omega^2 hP}{4\alpha}G_{22}(\varphi_n,\Psi_{12n}) - \frac{\omega_n^2 hP}{2\alpha}G_{22}(\varphi_n,\Psi_{9n}) - \frac{\Omega^2 hP}{4\alpha}G_{22}(\varphi_n,\Psi_{11n}) - \\ &\frac{(\omega_n-\Omega)^2 hP}{4\alpha}G_{22}(\Psi_{11n},\varphi_n)\end{aligned}\right\} - \\ &\frac{hk_f}{2\alpha}\left\{\begin{aligned}&\Lambda_1[G_{22}(\varphi_n,\Psi_{3n}) + G_{22}(\Psi_{3n},\varphi_n) + G_{22}(\varphi_n,\Psi_{6n}) + G_{22}(\Psi_{6n},\varphi_n)] + \\ &\Lambda_2[G_{22}(\varphi_n,\Psi_{4n}) + G_{22}(\Psi_{4n},\phi_n) + G_{22}(\varphi_n,\Psi_{5n}) + G_{22}(\Psi_{5n},\varphi_n) + 2G_{22}(\varphi_n,\Psi_{8n}) + \\ &2G_{22}(\Psi_{8n},\varphi_n)] + \\ &\frac{hP}{4\alpha}[2G_{22}(\varphi_n,\Psi_{9n}) + 2G_{22}(\Psi_{9n},\phi_n) - G_{22}(\varphi_n,\Psi_{11n}) - G_{22}(\Psi_{11n},\varphi_n) - G_{22}(\varphi_n,\Psi_{12n}) - \\ &G_{22}(\Psi_{12n},\varphi_n)]\end{aligned}\right\} - \\ &\frac{hP}{4\alpha}\left\{\Lambda_1\Psi_{3n}'' + \Lambda_2\Psi_{4n}'' + \Lambda_1\Psi_{6n}'' + \Lambda_1\Psi_{5n}'' - \frac{hP}{4\alpha}\Psi_{11n}'' - \frac{hP}{4\alpha}\Psi_{12n}''\right\} + 2[G_3(\varphi_n,\varphi_n,\phi_n) + G_3(\varphi_n,\phi_n,\varphi_n) + G_3(\phi_n,\varphi_n,\varphi_n)] \end{aligned} \right\}\phi_n \mathrm{d}x$$

（编辑　李坤璐）